Anwendung des Fuzzy-Ansatzes in der Entscheidungstheorie: Wahlhandlungstheorie*

Seminar: Modellierung unsicheren Wissens
Seminarleiter: Prof. Dr. Thomas Augustin

Referent: Michael Obermeier

1. März 2005

*nach: Ott, Notburga: "Unsicherheit, Unschärfe und rationales Entscheiden" (2001), Physica-Verlag Heidelberg

Gliederung

1. (Klassische) Entscheidungstheorie
   - 1.1 Einführung
   - 1.2 Wo kann Unschärfe auftreten?
2. Fuzzy-Präferenzrelationen
   - 2.1 Verschiedene Interpretationen
   - 2.2 Zerlegung einer schwachen Präferenzrelation
   - 2.3 Auswahl von Alternativen: Präferenzordnungen
3. Unscharfe Nutzenbewertung
   - 3.1 α-Schnitt Verfahren
   - 3.2 Fuzzy-Maximal- und Minimalmengen
   - 3.3 Zufriedenheitsfunktion
   - 3.4 Weitere Auswahlverfahren
4. Unscharfer Erwartungsnutzen
   - 4.1 Fuzzy-Zustände
   - 4.2 Fuzzy-Erwartungswerte
   - 4.3 Fuzzy-probabilistische Entscheidungen
   - 4.4 Choquet-Erwartungsnutzen

1. (Klassische) Entscheidungstheorie

1.1 Einführung

- Es existieren bestimmte Handlungsalternativen, die abhängig von verschiedenen Umweltzuständen bewertet werden
- Bekannt sind dabei die jeweiligen Konsequenzen der Alternativen und somit ihr Nutzen bei gewissen Umweltzuständen
- Ausserdem ist eine gewisse Information über die Eintrittswahrscheinlichkeiten der Umweltzustände vorhanden
- Die Frage lautet dann: Welche der möglichen Aktionen ist optimal?

Typisches Beispiel: "Ausflugsproblem"

Entscheidungssituation: Ausflug in die Berge, unsichere Wetterlage
Welche Kleidung nimmt man mit?

- Aktionenraum: $\{a_1$:"leichte Kleidung", a_2 : "leichte Kleidung mit Schirm", a_3 : "dicke Regenkleidung"$\}$
- Umweltzustände: $\{\theta_1$: "schönes Wetter", θ_2 : "Regenwetter"$\}$
- Ergebnisse: $\{(a_1, \theta_1)$: "großer Spaßfaktor", (a_1, θ_2) : "Erkältung, geringer Spaßfaktor",...$\}$

Nutzentafel $u(a_i, \theta_j)$	"Schönes Wetter" θ_1	"Regenwetter" θ_2
"leichte Kleidung", a_1	5	0
"leichte Kleidung m. Regensch.", a_2	3	1
"schwere Regenkleidung", a_3	2	3

Vier Ebenen des Entscheidungsprozesses

1) Repräsentation des Wissens:

   A: Aktionenraum

   S: Zustandsraum

   $(S, \mathcal{S}, \mathcal{P})$: auf Zustandsraum definierter Wahrscheinlichkeitsraum

   $e : A \times S \to E$ Ergebnisfunktion

2) Bewertung der Ergebnisse

elementare Nutzenfunktion:

$$v : E \to U$$
$$\text{bzw.} \quad v \circ e : A \times S \to U$$

$\to$ auf dem Aktionen-Zustandsraum definiert

Zufallsvariable $V_i = v(e(a_i, S))$

3) Bewertung der Aktionen

Unsicherheit hinsichtlich der künftigen Umweltzustände, verschiedene Eintrittschancen

$\Rightarrow$ Nutzenfunktion über den Aktionen:

$$u : A \to U$$

ergibt sich aus dem Präferenzfunktional der Zufallsvariable V_i:

$$u(a_i) = \psi(v(E, P)) = \psi(v(e(a_i, S)), P)$$

4) Auswahlkriterium

üblicherweise Maximierungsprinzip:
die Aktion, die entsprechend der Nutzenfunktion über den Aktionen die höchste Bewertung hat, wird ausgewählt
(z.B. Bayes-Aktion, Minimax-Aktion,...)

1.2 Wo kann Unschärfe auftreten?

Auf allen vier Ebenen:

- Repräsentation des Wissens:
  - Ist das Wissen über Umweltzustände und Alternativen vollständig?
    (Wird bei Fuzzy-Mengen nicht berücksichtigt)
  - Sind die Zustände exakt beschreibbar?
    ("gutes Wetter", "schlechtes Wetter")
  - Information über Eintrittschancen der Umweltzustände: Wahrscheinlichkeitsmaß oder nur vages Wissen?
- Bewertung der Ergebnisse: Eindeutig?

  Nutzenwerte eines Ergebnisses können sich ändern
- Aktionenbewertung: wie berücksichtigt man Eintrittschancen der Zustände in der Nutzenbewertung?

– Entscheidungskriterien: "ungefähre Maximierung" des Nutzens

2. Fuzzy-Präferenzrelationen

- Begründen, sofern sie die Eigenschaften einer Präferenzordnung aufweisen, die Funktion einer elementaren Nutzenbewertung
- Dabei: $x, y...$ sind Konsequenzen (z.B. Konsequenz der Kombination "leichte Kleidung, Regenwetter"), d.h. mit Präferenzrelationen werden Werte für die elementare Nutzenbewertung gefunden
- Durch: paarweise Vergleiche der scharfen Alternativen
  $\Rightarrow$ Vergleichsergebnis: Fuzzy-Bewertung der Alternativen x und y mit

  unscharfer Präferenzrelation $\mu_R(x, y)$

2.1 Wie interpretiert man $\mu_R(x, y)$?

2.1.1 Als metrische Skala zwischen Präferierung und Ablehnung:

(Bezdek et al. (1978, 1979), Kacprzzyk et al. (1989, 1992))

$$\mu_R(x{,}y) = \begin{cases} 1 & x \text{ wird definitiv gegenüber } y \text{ präferiert} \\ \vdots & \\ 0.5 & \text{Indifferenz bezüglich x und y} \\ \vdots & \\ 0 & y \text{ wird definitiv gegenüber } x \text{ präferiert} \end{cases}$$

$$\mu_R(x{,}y) + \mu_R(y{,}x) = 1 \qquad \text{(Reziprozität)}$$

$$\mu_R(x{,}x) = 0$$

bzw.: $\mu_R(x, y)$ als offenbarte Präferenzen realisierter Beobachtungen mehrfacher Wahlhandlungen $\rightarrow$ probabilistische Präferenzen

2.1.2 Als Grad der Nicht-Schlechterbewertung

(Orlovsky (1978), Barrett/Pattanaik (1985), Montero (1994))

$\mu_R(x, y)$: Wahrheitswert der Aussage "x wird als mindestens gleichwertig zu y angesehen"

Wie erhält man $\mu_R(x, y)$?

- lokale Präferenzen:
  $\mu_R(x, y) = \mu_y(x)$: Grad, zu dem x als mindestens gleichwertig zu y gesehen wird ("Idealobjekt" y)
  (welche Kriterien, die y erfüllt, erfüllt auch x?)
  $\mu_R(x, y) = \mu_y(x)$ und $\mu_R(y, x) = \mu_x(y)$ messen in unterschiedlichen Dimensionen.

- globale Bewertungen:
  $\mu_R(x, y)$: Grad, mit dem x alle nutzenrelevanten Kriterien mindestens so gut wie y erfüllt
  $\rightarrow$ unterschiedliche Dimensionen

- entlang einer Dimension:
  Zugehörigkeit zu "Ideal-Fuzzy-Menge": relative Nutzenverhältnisse

$$\mu_R(x,y) = \frac{\mu(x,y)}{\mu(y)} = \frac{\mathtt{t}(\mu(x),\mu(y))}{\mu(y)}$$

2.1.3 Ein Beispiel: Vergleich dreier Konsequenzen bei vier nutzenrelevanten Kriterien (vgl. Ott (2001))

	Kriterien			
Konsequenzen	1	2	3	4
x	X	X		
y		X	X	
z		X	X	X

dabei: Konsequenzen aus Aktionen-Zustandsraum (z.B. Konsequenz aus "leichte Kleidung/Regenwetter") werden im Hinblick auf bestimmte Kriterien bewertet (z.B. "Gesundheit", "Freunden imponieren"...)

Lokale Präferenzen:

$\tilde{R}_l$	x	y	z
x	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
y	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{2}{3}$
z	$\frac{1}{2}$	1	1

Globale Bewertung:

$\tilde{R}_g$	x	y	z
x	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$
y	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{3}{4}$
z	$\frac{3}{4}$	1	1

<u>relative Nutzenverhältnisse:</u>

min-Operator:

$\tilde{R}_{n1}$	A	B	C
A	1	1	$\frac{2}{3}$
B	1	1	$\frac{2}{3}$
C	1	1	1

$\min\left\{\frac{\mu(A)}{\mu(B)}, 1\right\}$

algebraische t-Norm:

$\tilde{R}_{n2}$	A	B	C
A	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
B	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
C	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	1

$\frac{\mu(A)\cdot\mu(B)}{\mu(B)} = \mu(A)$

beschränkte t-Norm:

$\tilde{R}_{n3}$	A	B	C
A	1	0	$\frac{1}{3}$
B	0	1	$\frac{1}{3}$
C	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

$\max\left\{0, \frac{\mu(A)}{\mu(B)} + 1 - \frac{1}{\mu(B)}\right\}$

2.2 Zerlegung einer schwachen Präferenzrelation

"x ist nicht schlechter als y"
(schwache Präferenzrelation)

"x ist besser als y"
(strikte Präferenzrelation)

"keine Präferenzaussage möglich"
(Indifferenz)

Im klassischen Fall: $R = I \cup P$

$I \cap P = \emptyset$

daraus: $I = R \backslash P = R \cap P^c$

$P = R \backslash I = R \cap I^c$

$\Rightarrow$ Indifferenzrelation: $I = R \cap R^{-1}$

$\Rightarrow$ strikte Präferenzrelation: $P = R \cap (R^{-1})^c$

Im Fuzzy-Fall: Verallgemeinerung nicht so einfach möglich

Problem: fehlende Distributivität und Komplementarität der de Morgan Tripel (Alsina (1985))

Im Allgemeinen zwei Möglichkeiten:

- ausgehend von Verallgemeinerung der strikten Präferenzrelation:

$$\tilde{P} = \tilde{R} \cap (\tilde{R}^{-1})^c \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \tilde{I} &= \tilde{R} \cap \tilde{P}^c \\ \tilde{I} &= \tilde{R} \cap (\tilde{R} \cap (\tilde{R}^{-1})^c)^c \\ \tilde{I} &= \tilde{R} \cap (\tilde{R}^c \cup \tilde{R}^{-1}) \\ \text{im allgemeinen} \quad &\neq \tilde{R} \cap \tilde{R}^{-1} \end{aligned}$$

- ausgehend von Verallgemeinerung der Indifferenzrelation:

$$\tilde{I} = \tilde{R} \cap \tilde{R}^{-1} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \tilde{P} &= \tilde{R} \cap \tilde{I}^c \\ \tilde{P} &= \tilde{R} \cap (\tilde{R} \cap (\tilde{R}^{-1})^c \\ \tilde{P} &= \tilde{R} \cap (\tilde{R}^c \cup \tilde{R}^{-1})^c \\ \text{im allgemeinen} \quad &\neq \tilde{R} \cap (\tilde{R}^{-1})^c \end{aligned}$$

Ausgehend von strikter Fuzzy-Präferenzrelation

$\tilde{P} = \tilde{R} \cap (\tilde{R}^{-1})^c \quad \Rightarrow \quad \tilde{I} = \tilde{R} \cap \tilde{P}^c$

$$
\begin{aligned}
\text{bzw:} \quad & \mu_P(x,y) = \mu_R(x,y) \wedge \neg\mu_R(y,x) \\
& \qquad = \mathbf{t}(\mu_R(x,y), \mathbf{c}(\mu_R(y,x))) \\
\Rightarrow \quad & \mu_I(x,y) = \mu_R(x,y) \wedge \neg\mu_P(x,y) \\
& \qquad = \mathbf{t}(\mu_R(x,y), \mathbf{t}(\mu_R(x,y), \mathbf{c}(\mu_R(y,x))))
\end{aligned}
$$

beschränkte Operatoren: $\mu_P(x,y) = \max\{0, \mu_R(x,y) - \mu_R(y,x)\}$

$\mu_I(x,y) = \min\{\mu_R(x,y), \mu_R(y,x)\}$

Beispiel: lokale Präferenzen

$\tilde{R}_l$	A	B	C
A	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
B	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{2}{3}$
C	$\frac{1}{2}$	1	1

$\Longrightarrow$

$\tilde{P}_{lP}$	A	B	C
A	0	0	0
B	0	0	0
C	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	0

$\tilde{I}_{lP}$	A	B	C
A	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
B	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{2}{3}$
C	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1

Ausgehend von Fuzzy-Indifferenzrelation

$\tilde{I} = \tilde{R} \cap \tilde{R}^{-1} \quad \Rightarrow \quad \tilde{P} = \tilde{R} \cap \tilde{I}^c$

$$
\begin{aligned}
\text{bzw:} \quad & \mu_I(x,y) = \mu_R(x,y) \wedge \mu_R(y,x) \\
& \qquad = \mathbf{t}(\mu_R(x,y), \mu_R(y,x)) \\
\Rightarrow \quad & \mu_P(x,y) = \mu_R(x,y) \wedge \neg\mu_I(x,y) \\
& \qquad = \mathbf{t}(\mu_R(x,y), \mathbf{c}(\mathbf{t}(\mu_R(x,y), \mu_R(y,x))))
\end{aligned}
$$

beschränkte Operatoren: $\mu_I(x,y) = \max\{0, \mu_R(x,y) + \mu_R(y,x) - 1\}$

$\mu_P(x,y) = \min\{\mu_R(x,y), 1 - \mu_R(y,x)\}$

Beispiel: lokale Präferenzen

$\tilde{R}_l$	A	B	C
A	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
B	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{2}{3}$
C	$\frac{1}{2}$	1	1

$\Longrightarrow$

$\tilde{P}_{lI}$	A	B	C
A	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
B	$\frac{1}{2}$	0	0
C	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	0

$\tilde{I}_{lI}$	A	B	C
A	1	0	0
B	0	1	$\frac{2}{3}$
C	0	$\frac{2}{3}$	1

Verschiedenste (strikte) Präferenz- und Indifferenzrelationen

abhängig von:

- Interpretation der schwachen Präferenzrelation (lokale Präferenz,...)
- Ausgangspunkt der Verallgemeinerung ($\tilde{I} \Rightarrow \tilde{P}$ oder $\tilde{P} \Rightarrow \tilde{I}$)
- verwendete Operatoren (beschränkte Operatoren,...)
  abhängig von Korrelationsstruktur der die Zugehörigkeitswerte $\mu_R(x, y)$ und $\mu_R(y, x)$ generierenden zufälligen Mengen

Beispiel: $\mu_R(x, y) = 0.7$ und $\mu_R(y, x) = 0.5$
bei lokaler Präferenz Interpretation der strikten Präferenzrelation $\mu_P(x, y)$ als:
x hat 70% der Eigenschaften von y
y hat 50% der Eigenschaften von x
mit beschränkten Operatoren, ausgehend von Verallgemeinerung der strikten Präferenz:

$$\mu_P(x, y) = \mu_R(x, y) - \mu_R(y, x) = 0.2$$
$$\mu_I(x, y) = \min\{\mu_R(x, y), \mu_R(y, x)\} = 0.5$$

2.3 Auswahl von Alternativen aus $\tilde{R}$ und $\tilde{P}$: Präferenzordnungen

Auswahl ist eindeutig, wenn die Präferenzrelation die Kriterien einer Präferenzordnung erfüllt: Reflexivität, Vollständigkeit und Transitivität.
Transitivitätsbedingung:

$$\mathbf{t}(\mu_R(x, z), \mu_R(z, y)) \leq \mu_R(x, y)$$

bzw. aussagenlogisch: $(\mu_R(A, B) \wedge \mu_R(B, C) \rightarrow \mu_R(A, C)) = 1$

Im Beispiel:

$\tilde{R}_l$	x	y	z
x	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
y	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{2}{3}$
z	$\frac{1}{2}$	1	1

$\mu_{\tilde{R}_l}(A, C) \geq \mathbf{t}(\mu_{\tilde{R}_l}(A, B), \mu_{\tilde{R}_l}(B, C))$
gilt nicht für min-Operator!
aber transitiv für andere t-Normen!

Intransitivitätsbeispiel von Gottinger (1974)

Entscheidungssituation: Akademiker X mit Doktorgrad hat folgende Alternativen

- x ordentlicher Professor mit Jahresgehalt von 20.000 DM
- y außerordentlicher Professor mit Jahresgehalt von 25.000 DM
- z Dozent mit Jahresgehalt von 30.000 DM

X zieht x gegenüber y vor, da der höhere Rang mehr wert ist als der Gehaltsunterschied, dasselbe gilt für y und z.
Aber beim Vergleich x, z gleicht das höhere Gehalt den Statusunterschied aus und er präferiert z.
Entstanden durch: Verwendung von subadditiven (bei Bewertung des Rangunterschieds) bzw. superadditiven Maßen (bei Bewertung des Gehalts)
Für verschiedene t-Normen unterscheiden sich auch die Transitivitätsbedingungen, so dass im vorliegenden Beispiel Transitivität durchaus gegeben sein kann. (siehe auch: Beispiel vorherige Seite)

Ist Präferenzrelation keine Präferenzordnung:

$\Longrightarrow$ Einschränkung der Alternativen durch Auswahlmengen
Fuzzy-Maximalmenge
Menge der nicht strikt dominierten Alternativen:

$$\tilde{M} = \left\{ x, \mu_M(x) | x \epsilon X \right\}$$

mit $\mu_M(x) = \inf_{y \epsilon X} [1 - \mu_P(y, x)]$: Grad, mit dem x nicht strikt präferiert wird

Fuzzy-Bestenmenge
Ausgewählte Alternativen werden mindestens so gut bewertet wie alle anderen Alternativen

$$\tilde{C} = \left\{ (x, \mu_C(x)) | \mu_C(x) = \mathbf{t}_{y \epsilon X}\, \mu_R(x, y) \right\}$$

dabei: $\tilde{C} \subseteq \tilde{M}$ (Nicht-vergleichbare Alternativen in Maximalmenge, aber nicht in Bestenmenge enthalten)

Scharfe Auswahl bei Fuzzy-Präferenzen

- Element aus $\tilde{C}$ mit höchster Bewertung
  Bei Nicht-Eindeutigkeit: Vergleich mit $\tilde{M}$ bzw. weiteren Auswahlmengen

- abstandsminimale Präferenzordnung: (Dutta et al.(1986), Kuz'min, Ovchimikov (1980))
  Suche eine scharfe Präferenzordnung mithilfe einer Distanzfunktion (größtmögliche Ähnlichkeit zu unscharfer Präferenzrelation)

  z.B. Hammingdistanz:

$$\min_S d(\tilde{R}, S) = \left(\sum_{x \epsilon \Omega} \sum_{y \epsilon \Omega} |r(x,y) - s(x,y)|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

3. Unscharfe Nutzenbewertung

Anderer Ansatz: jeder Aktion bzw. jedem Ergebnis kann ein Nutzenwert zugeordnet werden, der aber unscharf ist. (z.B. kann sich im Zeitverlauf ändern)
Fuzzy-Analogon zur elementaren Nutzenfunktion
unscharfe Nutzenmengen:

$$\tilde{U}(A_i) = \{(u, \mu_i(u)) | u \,\epsilon\, U_i\} =: \tilde{U}_i$$

dabei:

A_i	Alternative i
U_i	Menge der für A_i in Betracht kommenden Nutzenwerte
μ_i	Zugehörigkeitsgrad von $u \,\epsilon\, U_i$ zur Menge der Nutzenwerte von A_i (Ausdruck der subjektiv empfundenen Realisierungschance, keine Wahrscheinlichkeiten.!)

Auswahl der Aktionen durch Rangordnung der Mengen

Grundsätzlich zwei Vorgehensweisen:

- Nutzenindexwert für jede Alternative (absolutes Nutzenniveau) mit "Optimalitätsmenge": $\tilde{C} = \{(i, \mu_C(i)) | i \,\epsilon\, I\}$.
  $\mu_C(i)$: Zugehörigkeitsgrad der Alternative $i \epsilon I$
- Präferenzrelation über den Fuzzy-Alternativen (relatives Nutzenniveau)

3.1 α-Schnitt Verfahren

Es werden nur Nutzenzugehörigkeitswerte, die über einem Mindestwert, einem α-Level liegen, betrachtet und verglichen und daraus eine Rangordnung gebildet.
(Buckley und Chenas (1989))
Dabei Betrachtung der linken bzw. rechten Ränder dieser Schnitte: $[u_{i1}^{\alpha}, u_{i2}^{\alpha}]$

- ρ-Präferenz: $\tilde{U}_i \succ_\rho \tilde{U}_j$, wenn $\rho \,\epsilon\, [0, 1)$ die kleinste reelle Zahl, so dass:

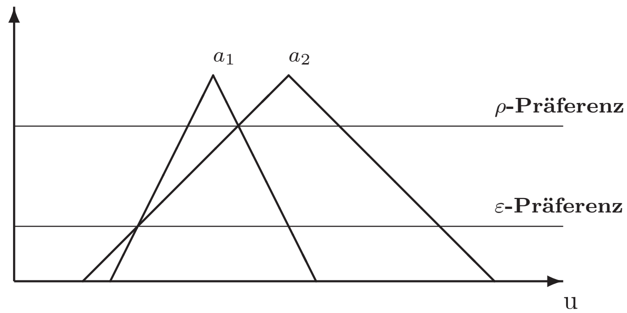
$$\begin{array}{ll} u_{i1}^{\alpha} \geq u_{j2}^{\alpha} & \forall \alpha \,\epsilon\, [\rho, 1] \qquad \text{und} \\ u_{i1}^{\alpha} > u_{j2}^{\alpha} & \text{für mindestens ein } \alpha \,\epsilon\, [\rho, 1] \end{array}$$

- ε-Präferenz: $\tilde{U}_i \succ_\varepsilon \tilde{U}_j$, wenn $\varepsilon \,\epsilon\, [0, 1)$ die kleinste reelle Zahl, so dass:

$$\begin{array}{ll} u_{i1}^{\alpha} \geq u_{j1}^{\alpha} \;\wedge\; u_{i2}^{\alpha} \geq u_{j2}^{\alpha} & \forall \alpha \,\epsilon\, [\varepsilon, 1] \qquad \text{und} \\ u_{i2}^{\alpha} > u_{j2}^{\alpha} \;\vee\; u_{i2}^{\alpha} > u_{j2}^{\alpha} & \text{für mindestens ein } \alpha \,\epsilon\, [\varepsilon, 1] \end{array}$$

- Nutzenindex von Adamo (1980): $F_\alpha(\tilde{U}_i) = \max\{u \,\epsilon\, U_i | \mu_i(u) \geq \alpha, \, \alpha \,\epsilon\, [0, 1]\}$

Beispiel:



Nachteil: Bewertung lediglich an einem einzigen α-Level.
Andere α-Schnitt Verfahren:

- Niveau-Ebenen-Verfahren von Rommelfanger (1984): verschiedene α-Niveaus und ihre jeweilige Ausdehnung werden gemittelt und daraus ein Präferenzindex gebildet
- Verfahren von Gonzales/Villa (1992): Vergleichsindikator von je zwei Alternativen mithilfe mehrerer α-Schnitte und "Optimismusparameter" λ

3.2 Vergleich mit Fuzzy-Maximum und Fuzzy-Minimum-Mengen

- Bildung einer "Idealmenge": Fuzzy-Maximum-Menge (Jain (1976))

  $\tilde{MAX} = \{(u, \mu_{\max}(u)) | u \,\epsilon\, U\}$ mit $\mu_{\max}(u) = (\frac{u - \inf U}{\sup U - \inf U})^k$

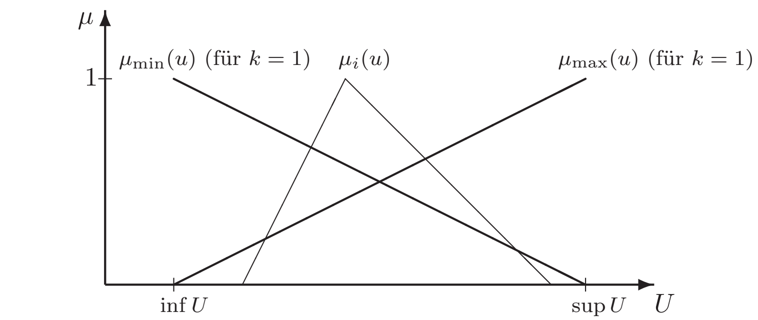
- Bildung einer "Anti-Idealmenge": Fuzzy-Minimum-Menge (Chen (1985))

  $\tilde{MIN} = \{(u, \mu_{\min}(u)) | u \,\epsilon\, U\}$ mit $\mu_{\min}(u) = (\frac{\sup U - u}{\sup U - \inf U})^k$

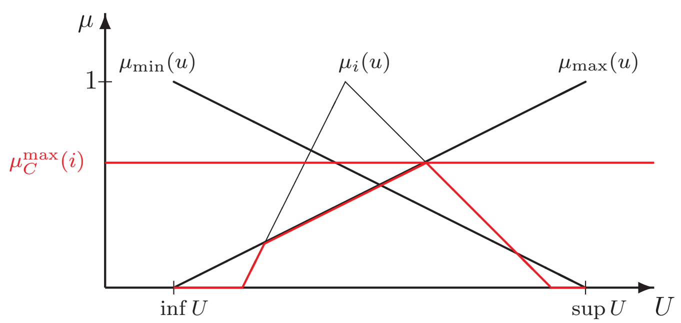
- Daraus entstehen die Bewertungsindizes:

$$\mu_C^{\max}(i) = \sup_{u \epsilon U}\{\min\{\mu_i(u), \mu_{\max}(u)\}\}$$
$$\mu_C^{\min}(i) = \sup_{u \epsilon U}\{\min\{\mu_i(u), \mu_{\min}(u)\}\}$$
$$\mu_C = \frac{1}{2}[\mu_C^{\max}(i) + (1 - \mu_C^{\min}(i))]$$

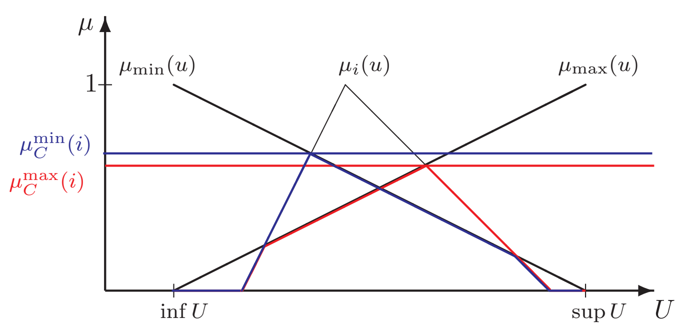
Beispiel: Zugehörigkeitsfunktionen der Aktion $i(u, \mu_i(u))$, der "Idealmenge" $(\mu_{\max}(u))$ und der "Anti-Idealmenge" $(\mu_{\min}(u))$



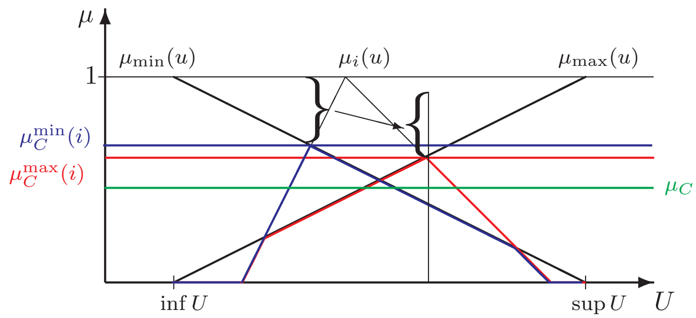
Zugehörigkeit von A_i zur Menge der optimalen Alternativen: $\mu_C^{\max}$



Zugehörigkeit zur Menge der "anti-optimalen" Aktionen: $\mu_C^{\min}$

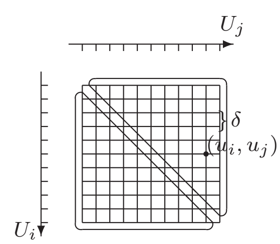


"Mittelwert" aus Zugehörigkeit zur Menge der optimalen Aktionen und Nicht-Zugehörigkeit zur Menge der "anti-optimalen" Aktionen: μ_C



3.3 Bildung einer Zufriedenheitsfunktion (Lee et al.,1994)

- Stützbereiche der Fuzzy-Mengen werden diskret in äquidistantem Gitter approximiert
- Knotenpunkte des Gitters beim Vergleich zweier Alternativen kennzeichnen ein Tupel möglicher Nutzenwerte
- Zufriedenheitsfunktion durch: Verhältnis der Zugehörigkeitswerte des unteren bzw. oberen Dreiecks zur Summe der Zugehörigkeitswerte aller Knotenpunkte
- Mit Zufriedenheitsfunktion Bildung einer Präferenzrelation, aus dieser dann Auswahl mittels des Kriteriums der minimalen Nicht-Dominiertheit



$$Z(\tilde{U}_i > \tilde{U}_j) = \frac{\sum\limits_{u_i=\min(U_i)}^{\max(U_i)} \sum\limits_{u_j=\min(U_j)}^{\min(u_i-\delta,\max(U_j))} \mathbf{t}(\mu_i(u_i), \mu_j(u_j))}{\sum\limits_{u_i=\min(U_i)}^{\max(U_i)} \sum\limits_{u_j=\min(U_j)}^{\max(U_j)} \mathbf{t}(\mu_i(u_i), \mu_j(u_j))}$$

$$Z(\tilde{U}_i = \tilde{U}_j) = \frac{\sum\limits_{u_i=u_j=\max(min(U_i),\min(U_j))}^{\min(\max(U_i),\max(U_j))} \mathbf{t}(\mu_i(u_i), \mu_j(u_j))}{\sum\limits_{u_i=\min(U_i)}^{\max(U_i)} \sum\limits_{u_j=\min(U_j)}^{\max(U_j)} \mathbf{t}(\mu_i(u_i), \mu_j(u_j))}$$

Zufriedenheitswert für die Gleichheit wird jeweils zur Hälfte zu den beiden anderen Zufriedenheitswerten hinzugezählt und so eine schwache Präferenzrelation gebildet

Beispiel: (mit min-Operator als t-Norm)

$$\tilde{U}_1 = \{(1, 0.6), (2, 0.2)\}$$
$$\tilde{U}_2 = \{(2, 0.4), (3, 0.4)\}$$

$$Z(A_2 > A_1) = \frac{\min(0.4,0.6)+\min(0.4,0.6)+\min(0.4,0.2)}{\min(0.4,0.6)+\min(0.4,0.2)+\min(0.4,0.6)+\min(0.4,0.2)}$$
$$= \frac{0.4+0.4+0.2}{0.4+0.2+0.4+0.2} = 0.83$$

$$Z(A_1 > A_2) = 0$$

$$Z(A_1 = A_2) = \frac{\min(0.2,0.4)}{\min(0.4,0.6)+\min(0.4,0.2)+\min(0.4,0.6)+\min(0.4,0.2)}$$
$$= \frac{0.2}{0.4+0.2+0.4+0.2} = 0.17$$

$$\mu_R(A_2, A_1) = 0.83 + \tfrac{1}{2} \cdot 0.17 = 0.915$$
$$\mu_R(A_1, A_2) = 0 + \tfrac{1}{2} \cdot 0.17 = 0.085$$

3.4 Weitere Vorgehensweisen zur Auswahl aus Fuzzy-Nutzen

- Bewertungsindex aufgrund "bester" Zugehörigkeitswerte (Baas und Kwakernak (1977))
- Vergleich mit oberen und unteren Wahrscheinlichkeiten (Dubois/Prade (1983b, 1988))
- Vergleich von Mittelwert uns Streuung von stochastischen Fuzzy-Zahlen (z.B. Lee/Li (1988))

4. Unscharfer Erwartungsnutzen

- Analogon zur Nutzenfunktion über den Aktionen
- Berücksichtigung der Eintrittswahrscheinlichkeiten der Umweltzustände
- Berechnung des erwarteten Nutzens aus Wissen um Eintrittswahrscheinlichkeiten der Umweltzustände und den verschiedenen Nutzenwerten der Aktionen bei diesen
- Bewertung der Aktion mittels Erwartungsnutzen
- Unschärfe möglich bei Ergebnisbewertung oder Wahrscheinlichkeiten der Umweltzustände (oder bei beiden)

Bewertung von Aktionen bei verschiedenen Unsicherheitsquellen

	$v \circ e(a_i, s_j)$	$v \circ e(a_i, \tilde{s}_j)$	$v \,\tilde{\circ}\, e(a_i, s_j)$
Wahrscheinlich- keiten $p(s_j)$	Erwartungsnutzen	Fuzzy-Zustände	Fuzzy- Erwartungswerte, Erwartete Zuge- hörigkeitswerte
Fuzzy- Wahrscheinlich- keiten $\tilde{p}(s_j)$			Fuzzy- probabilistische Entscheidungen
Possibilitäten $\pi(s_j)$			Possibilistische Entscheidungen
nicht-additive Wahrscheinlich- keiten $\mu(s_j)$	Choquet- Erwartungsnutzen LPI		

4.1 Fuzzy-Zustände (Zadeh (1968))

- Unschärfe bei Zuständen: scharfe Zustände werden unscharfem Ereignis zugeordnet (Beispiel: Temperatur $\mapsto$ "warmer Tag")
- Betrachtung scharfer Nutzen $v(a_i, \tilde{S}_j)$ in Abhängigkeit der Aktionen und der Fuzzy-Zustände
- Für die scharfen Zustände existieren Informationen in Form von Wahrscheinlichkeiten. Die Wahrscheinlichkeit eines Fuzzy-Ereignisses berechnet sich somit als:
$$P(\tilde{S}) = \int_{x \epsilon S(\tilde{S})} \mu_S(x) dp = \mathbb{E}(\mu_S)$$
mit $\sum_{i \epsilon I} P(\tilde{S}_i) = 1$, d.h. $\sum_{i \epsilon I} \mu_{S_i}(x) = 1$ (Fuzzy-Zustände orthogonal)
- Berechnung des Erwartungsnutzens $\Rightarrow$ Entscheidungstheorie

4.2 Fuzzy-Erwartungswerte (z.B. Watson et al. (1979))

- Wissen über Eintrittswahrscheinlichkeiten verschiedener Zustände in Form von Wahrscheinlichkeiten
- unscharfe zustandsabhängige Nutzenbewertung der Aktionen (Unschärfe aus Bewertung oder durch unscharfe Aktionen)
- Erwartungswert einer Alternative:

$$\tilde{\mathbb{E}}(a_i) = \{(\hat{u}, \mu_i^E(\hat{u}) | \hat{u} \,\epsilon\, \mathbb{R}\} \quad \text{mit}$$

$$\mu_i^E(\hat{u}) = \sup_{\substack{(u_1,\ldots u_n)\epsilon U^n \\ \hat{u}=\Sigma_{j=1}^n u_j \cdot p(s_j)}} \{\min\{\mu_{i1}(u_1), \ldots \mu_{in}(u_n)\}\}$$

bzw. mit erweiterten Operatoren:

$$\tilde{\mathbb{E}}(a_i) = \tilde{U}(a_i, s_1) \odot p(s_1) \oplus \ldots \oplus \tilde{U}(a_i, s_n) \odot p(s_n)$$

Beispiel: Eine unscharf bewertete Aktion, zwei Umweltzustände

$$\tilde{U}(A, s_1) = \{(2, 0.6), (3, 0.4)\}$$

$$\tilde{U}(A, s_2) = \{(1, 0.3), (3, 0.7)\}$$

$P(S_1) = 0.4$ $\qquad$ $P(S_2) = 0.6$

$\hat{u}^{(1)}$=2·0.4+1·0.6=1.4	min{μ_1(2),μ_2(1)}=min{0.6,0.3}=0.3
$\hat{u}^{(2)}$=2·0.4+3·0.6=2.6	min{0.6,0.7}=0.6
$\hat{u}^{(3)}$=3·0.4+1·0.6=1.8	min{0.4,0.3}=0.3
$\hat{u}^{(4)}$=3·0.4+3·0.7=3.3	min{0.4,0.7}=0.4

$$\Longrightarrow \quad \tilde{E}(a) = \{(\hat{u}^{(1)}, \min\{\mu_1(2), \mu_2(1)\}), \ldots\}$$

$$= \{(1.8, 0.3), (2.6, 0.6), (1.8, 0.3), (3.3, 0.4)\}$$

Fuzzy-Mengen mittels Rangordnungsverfahren (s.o.) ordnen!

4.3 Fuzzy-probabilistische Entscheidungen

(Watson et al. (1979), Freeling (1980), Dubois/Prade (1982b))

- zweite Ungewissheitsebene: Eintrittswahrscheinlichkeiten als Fuzzy-Zahlen:

$$\tilde{P}(s_j) = \{(p, \mu_{p_j}(p)) | p \,\epsilon\, [0,1]\}$$

- Erwartungsnutzen berechnet sich dann als:

$$\tilde{\mathbb{E}}^P(a_i) = \{(\hat{u}, \mu_i^p(\hat{u}) | \hat{u} \,\epsilon\, U\} \quad \text{mit}$$

$$\mu_i^P(\hat{u}) = \sup\{\min\{\mu_{i1}(u_1), \ldots \mu_{in}(u_n), \mu_{p1}(p_1), \ldots \mu_{pn}(p_n)\}\}$$

$$\text{wobei} \quad (u_1, \ldots u_n, p_1, \ldots p_n) \,\epsilon\, U^n \times [0,1]^n$$

$$\hat{u} = \Sigma_{j=1}^n u_j p_j \wedge \Sigma_{j=1}^n p_j = 1$$

4.4 Choquet-Erwartungsnutzen **(Wakker (1989), Dyckerhoff (1994))**

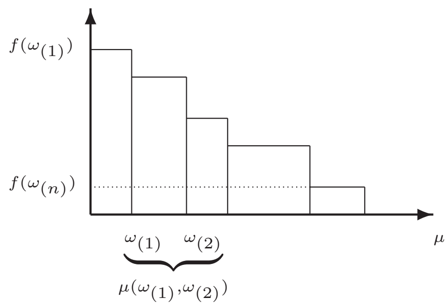
- Informationen über Nutzenbewertung vorhanden, aber...
- ...Eintrittschancen genügen nicht den Kriterien eines Wahrscheinlichkeitsmaßes
  $\Longrightarrow$ nicht additive Wahrscheinlichkeiten (Fuzzy-Maße bzw. Choquet-Kapazitäten)
- Choquet-Integral: (stetig)

$$\int_\Omega f \, d\mu =$$

$$\int_0^\infty \mu(\{\omega \,\epsilon\, \Omega | f(\omega) \geq \tau\}) d\tau + \int_{-\infty}^0 [\mu(\{\omega \,\epsilon\, \Omega | f(\omega) \geq \tau\}) - 1] d\tau$$

- im diskreten Fall: Für $\Omega = \{\omega_1, \ldots \omega_n\}$ und $f(\omega_{(1)}) \geq f(\omega_{(2)}) \geq \ldots \geq f(\omega_{(n)})$ gilt

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega f d\mu = \textstyle\sum_{i=1}^{n} [f(\omega_{(i)}) - f(\omega_{(i+1)})] \cdot \mu(\{\omega_{(1)}, \ldots \omega_{(i)}\}) \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^{n} f(\omega_{(i)}) \cdot [\mu(\{\omega_{(j)} | j \leq i\}) - \mu(\{\omega_{(j)} | j < i\})] \\
&= \sum_{i=1}^{n} f(\omega_{(i)}) \cdot P(\{\omega_{(i)}\})
\end{aligned}$$



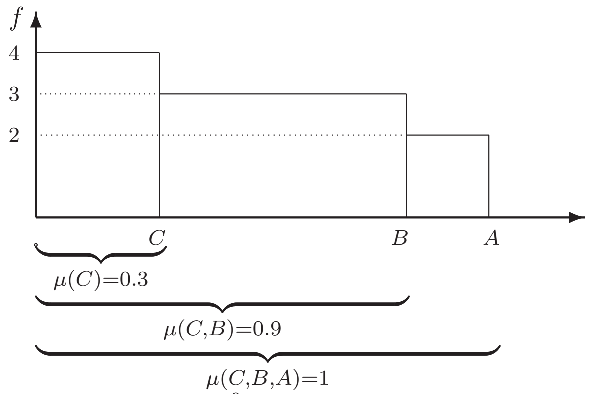
- $P(\{\omega_{(i)}\})$ erfüllen dann das Additivitätskriterium:
  $\forall A, B \subseteq \mathcal{A}, A \cap B = \emptyset : \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$,
  womit das Choquet-Integral die Transformation eines Fuzzy-Maßes in ein Wahrscheinlichkeitsmaß liefert
  (Für μ = Wahrscheinlichkeitsmaß: Choquet-Integral identisch mit Lebesgue-Integral $\Rightarrow$ liefert klassischen Erwartungswert)

- Verwende nun statt f die elementare Nutzenfunktion über den situationsabhängigen Ergebnissen $v \circ e$ und berechne mit dem Choquet-Integral als Präferenzfunktional ψ einen verallgemeinerten Erwartungsnutzen (Choquet-Erwartungsnutzen):

$$u^c(a_i) = \psi(v(e(a_i, s_j)), \mu) = \int_{a \times S} v \circ e(a_i, s_j) d\mu$$

Ein Beispiel: Gegeben reguläres Fuzzy-Maß mit

$$\mu(A) = 0.2, \quad \mu(B) = 0.5, \quad \mu(C) = 0.3$$
$$\mu(B \cup C) = 0.9, \quad \mu(A \cup B \cup C) = 1$$
$$f(A) = 2, \quad f(B) = 3, \quad f(C) = 4$$



$\int_\Omega f \, d\mu = (4-3) \cdot \mu(C) + (3-2) \cdot \mu(C,B) + 2 \cdot \mu(C,B,A) =$

$1 \cdot 0.3 + 1 \cdot 0.9 + 2 \cdot 1 = 3.2$